

文章编号:1005-3085(2010)03-0446-09

可列 m 重非齐次马氏链的遍历性与熵率*

姜 蕾¹, 王 豹²

(1- 鲁东大学数学与信息学院, 烟台 264025; 2- 徐州工程学院, 徐州 221008)

摘 要: 本文在研究可列 m 重非齐次马氏链各种遍历性定义的基础上, 以转移概率引入可列 m 重非齐次马氏链绝对平均强遍历性的概念, 通过设定可列 m 重非齐次马氏链满足这种强遍历的充分条件, 得出可列 m 重非齐次马氏链泛函的一个极限定理, 并应用此极限定理得到了可列 m 重非齐次马氏链熵率存在的一个定理。

关键词: 非齐次马氏链; 遍历性; 转移矩阵

分类号: AMS(2000) 60J20

中图分类号: O211.62

文献标识码: A

1 引言

关于非齐次马氏链的强遍历性和 C -强遍历性已有不少研究, 参见文献 [1-4]。文献 [5] 是用范数定义非齐次马氏链绝对平均强遍历性, 并给出满足这种强遍历性的一个充要条件。本文则是用转移概率定义可列 m 重非齐次马氏链的绝对平均强遍历性, 目的是得到满足这种强遍历性的一个充分条件, 并得出可列 m 重非齐次马氏链泛函的一个极限定理, 最后应用此极限定理得到了可列 m 重非齐次马氏链熵率存在的一个定理, 进而将非齐次马氏链的结论推广到可列 m 重非齐次马氏链。

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是在状态空间 S 上的可列 m 重非齐次马氏链, 其中 $S = \{1, 2, \dots\}$, 其初始分布与转移矩阵列分别为

$$q(i_0, \dots, i_{m-1}), \quad i_0, \dots, i_{m-1} \in S, \quad (1)$$

$$P_n = (p_n(j | i_1, \dots, i_m)), \quad j, i_1, \dots, i_m \in S. \quad (2)$$

其中

$$q(i_0, \dots, i_{m-1}) = P(X_0 = i_0, \dots, X_{m-1} = i_{m-1}),$$

$$p_n(j | i_1, \dots, i_m) = P(X_n = j | X_{n-m} = i_1, \dots, X_{n-1} = i_m).$$

记

$$i^m = (i_1, \dots, i_m), \quad j^m = (j_1, \dots, j_m), \quad r^m = (r_1, \dots, r_m).$$

记其 t 步转移概率为

$${}_n p^{(t)}(j | i^m) = P(X_{n+t-1} = j | X_{n-m} = i_1, \dots, X_{n-1} = i_m), \quad (3)$$

收稿日期: 2008-08-20. 作者简介: 姜蕾 (1981年11月生), 女, 硕士. 研究方向: 概率论极限理论.

*基金项目: 国家自然科学基金 (10571076).

易知

$${}_n p^{(t)}(j | i^m) = \sum_{r \in S} p_n(r | r^m) {}_{n+1} p^{(t-1)}(j | r, i_1, \dots, r_m), \quad (4)$$

则其 t 步转移矩阵列为

$${}_n P^{(t)} = ({}_n p^{(t)}(j | i_1, \dots, i_m)).$$

设

$$P = (p(j | i^m)), \quad j \in S, \quad i^m \in S^m, \quad (5)$$

是一 m 阶转移矩阵, 定义一 m 维转移矩阵如下

$$\bar{P} = (\bar{p}(j^m | i^m)), \quad i^m, j^m \in S^m, \quad (6)$$

其中

$$\bar{p}(j^m | i^m) = \begin{cases} p(j_m | i^m), & j_v = i_{v+1} \\ 0, & j_v \neq i_{v+1} \end{cases} \quad v = 1, 2, \dots, m-1. \quad (7)$$

称为由 m 阶转移矩阵 P 所确定的 m 维转移矩阵。

令 $Z_n = (X_n, \dots, X_{n+m-1})$, 则 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 为一阶 m 维非齐次马氏链。记

$$\bar{p}_n(j^m | i^m) = P(Z_n = j^m | Z_{n-1} = i^m) \quad (8)$$

为 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 的转移概率。其中

$$\bar{p}_n(j^m | i^m) = \begin{cases} p_{n+m-1}(j_m | i^m) & j_v = i_{v+1} \\ 0 & j_v \neq i_{v+1} \end{cases} \quad v = 1, 2, \dots, m-1, \quad (9)$$

则

$$\bar{P}_n = (\bar{p}_n(j^m | i^m)) \quad (10)$$

为由 m 阶转移矩阵 P_{n+m-1} 确定的 m 维转移矩阵。

令

$$\bar{p}^{(n, n+t)}(j^m | i^m) = P(Z_{n+t-1} = j^m | Z_{n-1} = i^m) \quad (11)$$

为 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 的 t 步转移概率, 得

$$\bar{p}^{(n, n+t)}(j^m | i^m) = \sum_{r^m} \bar{p}_n(r^m | i^m) \bar{p}^{(n+1, n+t)}(j^m | r^m), \quad (12)$$

则

$$\bar{P}^{(n, n+t)} = (\bar{p}^{(n, n+t)}(j^m | i^m)) \quad (13)$$

为 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 的 t 步转移矩阵列。易得

$$\bar{P}^{(n, n+t)} = \bar{P}_n \cdots \bar{P}_{n+t-1}.$$

定义 1 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为定义在 $S = \{1, 2, \dots\}$ 上的可列 m 重非齐次马氏链, 如果对任意的 $j \in S, i^m \in S^m$, 存在不依赖于 $i^m \in S^m$ 的 $\pi(j)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j \in S} |{}_k p^{(t)}(j | i^m) - \pi(j)| = 0, \quad (14)$$

则称 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为绝对平均强遍历的, 也称 P_n 为绝对平均强遍历的。

定义 2 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 为一阶 m 维非齐次马氏链, 如果对任意的 $i^m, j^m \in S^m$, 存在不依赖于 $i^m \in S^m$ 的 $\pi(j^m)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i^m \in S^m} |\bar{p}^{(k, k+n)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)| = 0, \quad (15)$$

则称 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 为强遍历的, 也称 \bar{P}_n 为强遍历的。

定义 3 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 为一阶 m 维非齐次马氏链, 如果对任意的 $i^m, j^m \in S^m$, 存在不依赖于 $i^m \in S^m$ 的 $\pi(j^m)$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(k, k+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)| = 0, \quad (16)$$

则称 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 为绝对平均强遍历的, 也称 \bar{P}_n 为绝对平均强遍历的。

引理 1^[5] 设 $\{a_n, n \geq 1\}$ 是一数列, a 为一实数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k - a| = 0, \quad (17)$$

则 i) 对任正整数 m 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_{m+k} - a| = 0, \quad (18)$$

ii) 存在 $\{a_n, n \geq 1\}$ 的一个子列 $\{a_{n_k}, k \geq 1\}$, 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a. \quad (19)$$

2 主要结果

定理 1 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为可列 m 重非齐次马氏链如前定义, P 是一个 m 阶转移矩阵, \bar{P} 是由 P 所确定的 m 维转移矩阵, 且 \bar{P} 是强遍历的, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j \in S} |p_k(j | i^m) - p(j | i^m)| = 0, \quad (20)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(k, k+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)| = 0, \quad (21)$$

即 \bar{P}_n 为绝对平均强遍历的, 其中 $\{\pi(j^m), j^m \in S^m\}$ 是 \bar{P} 所确定的平稳分布。

证明 由于

$$\bar{p}_{k+1}(j^m | r^m) = \begin{cases} p_{k+m}(j_m | r^m), & j_v = r_{v+1}, \\ 0, & j_v \neq r_{v+1}, \end{cases} \quad v = 1, 2, \dots, m-1,$$

同理

$$\bar{p}(j^m | r^m) = \begin{cases} p(j_m | r^m), & j_v = r_{v+1}, \\ 0, & j_v \neq r_{v+1}, \end{cases} \quad v = 1, 2, \dots, m-1.$$

所以

$$\begin{aligned} & \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}_{k+1}(j^m | r^m) - \bar{p}(j^m | r^m)| \\ &= \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j_m \in S} |p_{k+m}(j_m | r^m) - p(j_m | r^m)|. \end{aligned} \quad (22)$$

同理

$$\begin{aligned} & \sup_{i^m \in S^m} \sum_{r^m \in S^m} |\bar{p}_k(r^m | i^m) - \bar{p}(r^m | i^m)| \\ &= \sup_{i^m \in S^m} \sum_{r_m \in S} |p_{k+m-1}(r_m | i^m) - p(r_m | i^m)|. \end{aligned} \quad (23)$$

于是

$$\begin{aligned} & \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(k,k+2)}(j^m | i^m) - \bar{p}^{(2)}(j^m | i^m)| \\ &\leq \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} \left| \sum_{r^m \in S^m} \bar{p}_k(r^m | i^m) \bar{p}_{k+1}(j^m | r^m) - \sum_{r^m \in S^m} \bar{p}_k(r^m | i^m) \bar{p}(j^m | r^m) \right| \\ &\quad + \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} \left| \sum_{r^m \in S^m} \bar{p}_k(r^m | i^m) \bar{p}(j^m | r^m) - \sum_{r^m \in S^m} \bar{p}(r^m | i^m) \bar{p}(j^m | r^m) \right| \\ &= \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}_{k+1}(j^m | r^m) - \bar{p}(j^m | r^m)| + \sup_{i^m \in S^m} \sum_{r^m \in S^m} |\bar{p}_k(r^m | i^m) - \bar{p}(r^m | i^m)| \\ &\leq \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j_m \in S} |p_{k+m}(j_m | r^m) - p(j_m | r^m)| \\ &\quad + \sup_{i^m \in S^m} \sum_{r_m \in S} |p_{k+m-1}(r_m | i^m) - p(r_m | i^m)|. \end{aligned} \quad (24)$$

由 (20) 式与 (24) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(k,k+2)}(j^m | i^m) - \bar{p}^{(2)}(j^m | i^m)| = 0. \quad (25)$$

由归纳法, 对任意的 $v > 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(k,k+v)}(j^m | i^m) - \bar{p}^{(v)}(j^m | i^m)| = 0. \quad (26)$$

由于 \bar{P} 是强遍历的, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 v_0 , 使得

$$\begin{aligned} & \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(v_0)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)| < \varepsilon, \\ & \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(v_0+1)}(j^m | i^m) - \bar{p}^{(v_0)}(j^m | i^m)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (27)$$

易知, 若 $\{\pi(j^m), j^m \in S^m\}$ 是 \bar{P} 的平稳分布, 则有

$$\pi(j^m) = \sum_{i^m \in S^m} \pi(i^m) \bar{p}(j^m | i^m).$$

故由 (27) 式有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(1,1+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{v_0} \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(1,1+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)| \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{t=v_0+1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(1,1+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)| \\ &\leq \frac{2v_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{t=v_0+1}^n \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(t-v_0,1+t)}(j^m | r^m) - \bar{p}^{(v_0)}(j^m | r^m)| \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{t=v_0+1}^n \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(v_0)}(j^m | r^m) - \pi(j^m)| \\ &\leq \frac{2v_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{t=v_0+1}^n \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(t-v_0,1+t)}(j^m | r^m) - \bar{p}^{(v_0)}(j^m | r^m)| + \varepsilon, \quad (28) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{t=v_0+1}^n \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(t-v_0,1+t)}(j^m | r^m) - \bar{p}^{(v_0)}(j^m | r^m)| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-v_0} \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(t,t+v_0+1)}(j^m | r^m) - \bar{p}^{(v_0)}(j^m | r^m)| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(t,t+v_0+1)}(j^m | r^m) - \bar{p}^{(v_0+1)}(j^m | r^m)| \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(v_0+1)}(j^m | r^m) - \bar{p}^{(v_0)}(j^m | r^m)|. \quad (29) \end{aligned}$$

由 (26) 式、(27) 式及 (29) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=v_0+1}^n \sup_{r^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(t-v_0,1+t)}(j^m | r^m) - \bar{p}^{(v_0)}(j^m | r^m)| = 0. \quad (30)$$

故由 (28) 式与 (30) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(1,1+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)| = 0. \quad (31)$$

易知, 由 (20) 式及引理 1 可得, 对任意正整数 t 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j \in S} |p_{k+t}(j | i^m) - p(j | i^m)| = 0. \quad (32)$$

类似于 (31) 式的证明, 及 (32) 式可得 (21) 式成立。

证毕

由定理 1 的证明得出可列 m 重非齐次马氏链绝对平均强遍历的一个充分条件。

定理 2 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为可列 m 重非齐次马氏链如前定义, P 是一个 m 阶转移矩阵, \bar{P} 是由 P 所确定的 m 维转移矩阵且是强遍历的, 若对任意的 k , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(k,k+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)| = 0, \quad (33)$$

又设 $g_n(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 S^m 上的函数, g_n 与 g 均是列向量, 其分量分别为 $g_n(j^m)$ 与 $g(j^m)$, 设

$$\sup_{j^m \in S^m} |g_n(j^m)| \leq M,$$

满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{j^m \in S^m} |g_t(j^m) - g(j^m)| = 0, \quad (34)$$

设

$$\varphi^{(k,k+n)}(i^m) = E \left\{ \sum_{t=k+1}^{k+n} g_t(X_t^{t+m-1}) / n \mid X_k^{k+m-1} = i^m \right\},$$

$\varphi^{(k,k+n)}$ 也是列向量, 分量为 $\varphi^{(k,k+n)}(i^m)$; φ 也是列向量, 其所有分量均为

$$\sum_{j^m \in S^m} g(j^m) \pi(j^m),$$

则对任何 k 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i^m \in S^m} \left| \varphi^{(k,k+n)}(i^m) - \sum_{j^m \in S^m} g(j^m) \pi(j^m) \right| = 0, \quad (35)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^{k+n} g_t(X_t^{t+m-1}) \right\} = \sum_{j^m \in S^m} g(j^m) \pi(j^m), \quad (36)$$

其中 $\{\pi(j^m), j^m \in S^m\}$ 是 \bar{P} 所确定的平稳分布。

证明 由 (32) 及引理 1 知, 存在 $\{g_n, n \geq 1\}$ 的一个子列 $\{g_{n_l}, l \geq 1\}$ 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sup_{j^m \in S^m} |g_{n_l}(j^m) - g(j^m)| = 0,$$

而由

$$\sup_{j^m \in S^m} |g_n(j^m)| \leq M$$

知

$$\sup_{j^m \in S^m} |g(j^m)| \leq M,$$

又由 (34) 及引理 1 知, 对任何 k , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{j^m \in S^m} |g_{k+t}(j^m) - g(j^m)| = 0. \quad (37)$$

因为

$$\begin{aligned} & \sup_{i^m \in S^m} \left| \varphi^{(k, k+n)}(i^m) - \sum_{j^m \in S^m} \pi(j^m) g(j^m) \right| \\ &= \sup_{i^m \in S^m} \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{j^m \in S^m} \bar{p}^{(k, k+t)}(j^m | i^m) g_{k+t}(j^m) - \sum_{j^m \in S^m} \pi(j^m) g(j^m) \right| \\ &\leq \sup_{i^m \in S^m} \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{j^m \in S^m} \bar{p}^{(k, k+t)}(j^m | i^m) (g_{k+t}(j^m) - g(j^m)) \right| \\ &\quad + \sup_{i^m \in S^m} \left| \sum_{j^m \in S^m} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \bar{p}^{(k, k+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m) \right) g(j^m) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{j^m \in S^m} |g_{k+t}(j^m) - g(j^m)| \\ &\quad + \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \bar{p}^{(k, k+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m) \right| M. \end{aligned} \quad (38)$$

由于

$$\begin{aligned} & \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \bar{p}^{(k, k+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} |\bar{p}^{(k, k+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m)|, \end{aligned}$$

故由 (33) 式及上式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \bar{p}^{(k, k+t)}(j^m | i^m) - \pi(j^m) \right| = 0. \quad (39)$$

所以由 (33) 式、(37) 式、(38) 式及 (39) 式可得 (35) 式。又因为

$$\begin{aligned} & \left| E \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^{k+n} g_t(X_t^{t+m-1}) \right\} - \sum_{j^m \in S^m} g(j^m) \pi(j^m) \right| \\ &= \left| \sum_{i^m \in S^m} P(X_k^{k+m-1} = i^m) \varphi^{(k, k+n)}(i^m) - \sum_{i^m \in S^m} P(X_k^{k+m-1} = i^m) \sum_{j^m \in S^m} g(j^m) \pi(j^m) \right| \\ &\leq \sup_{i^m \in S^m} \left| \varphi^{(k, k+n)}(i^m) - \sum_{j^m \in S^m} g(j^m) \pi(j^m) \right|. \end{aligned} \quad (40)$$

所以由 (35) 式及 (40) 式可得 (36) 式。

证毕

3 应用

$\{X_n, n \geq 0\}$ 是在 $S = \{1, 2, \dots\}$ 中取值的随机变量序列, $H(X_0, \dots, X_n)$ 表示随机向量 (X_0, \dots, X_n) 的熵, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_0, \dots, X_n)$$

存在, 则称此极限为随机变量序列 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的熵率, 记为 $H(\{X_n\})$ 。易知^[6]

$$H(X_0, \dots, X_n) = H(X_0) + \sum_{k=m}^n H(X_k | X_0, \dots, X_{k-1}). \quad (41)$$

又若 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一 m 重马氏链, 易证

$$\begin{aligned} H(X_k | X_0, \dots, X_{k-1}) &= H(X_k | X_{k-m}, \dots, X_{k-1}) \\ &= - \sum_{i^m \in S^m} P(X_{k-m}^{k-1} = i^m) \sum_{j \in S} p_k(j | i^m) \log p_k(j | i^m), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{1}{n} H(X_0, \dots, X_n) = \frac{1}{n} H(X_0) + \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n H(X_k | X_{k-m}^{k-1}). \quad (43)$$

定理 3 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是定义在 $S = \{1, 2, \dots\}$ 上的可列 m 重非齐次马氏链, 其初始分布与转移矩阵列分别如 (1) 式与 (2) 式定义, P 是另一转移矩阵, \bar{P} 是由 P 所确定的 m 维转移矩阵, 且是强遍历的, 设

$$g_n(i^m) = \sum_{j \in S} p_n(j | i^m) \log p_n(j | i^m), \quad g(i^m) = \sum_{j \in S} p(j | i^m) \log p(j | i^m), \quad (44)$$

g_n 与 g 均是列向量, 其分量分别为 $g_n(j^m)$ 与 $g(j^m)$

$$\sup_{j^m \in S^m} |g_n(j^m)| \leq M, \quad \forall j^m \in S^m,$$

如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j \in S} |p_k(j | i^m) - p(j | i^m)| = 0 \quad (45)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{j^m \in S^m} |g_t(j^m) - g(j^m)| = 0, \quad (46)$$

则非齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 熵率存在, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_0, \dots, X_n) = -\pi g = - \sum_{i^m \in S^m} \pi(i^m) \sum_{j \in S} p(j | i^m) \log p(j | i^m), \quad (47)$$

其中 $\{\pi(i^m), i^m \in S^m\}$ 是 \bar{P} 所确定的唯一平稳分布。

证明 由(45)式及定理1知(33)式成立, 在定理2中设 $g_n(i^m)$ 与 $g(i^m)$ 由(44)式给出, 并注意到

$$\begin{aligned} & E g_n(X_{n-m}^{n-1}) \\ &= \sum_{i^m \in S^m} P(X_{n-m}^{n-1} = i^m) \sum_{j \in S} p_n(j | i^m) \log p_n(j | i^m) \\ &= H(X_n | X_{n-m}^{n-1}). \end{aligned} \quad (48)$$

由(33)式、(46)式、(32)式、(44)式、(43)式与(48)式可知(47)式成立。

证毕

参考文献:

- [1] Isaacson D, Madsen R. Markov Chains Theory and Application[M]. New York: Wiley, 1976
- [2] Huang C, Isaacson D, Binograde B. The rate of convergence of certain nonhomogeneous Markov chains[J]. Z Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw Gebeite, 1976, 35: 141-146
- [3] Bowerman B, David H T, Isaacson D. The convergence of Cesaro averages for certain nonstationary Markov chains[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1977, 5: 221-230
- [4] Paz A. Introduction to Probabilistic Automate[M]. New York: Academic Press, 1971
- [5] 杨卫国. 关于非齐次马氏链的绝对平均强遍历性及若干应用[J]. 数理统计与应用概率, 1996, 3: 220-226
Yang W G. On the absolute mean strong ergodic for nonhomogeneous Markov chains and some applications[J]. Mathematical Statistics and Applied Probability, 1996, 3: 220-226
- [6] Cover T M, Thomas J A. Elements of Information Theory[M]. New York: Wiley, 1991

The Ergodic and Entropy Rate of m th-order Countable Nonhomogeneous Markov Chains

JIANG Lei¹, WANG Bao²

(1- School of Mathematics & Information, Ludong University, Yantai 264025;

2- Xuzhou Institute of Technology, Xuzhou 221008)

Abstract: On the basis of analyzing various definitions for ergodic, this paper introduces the notion of absolute mean strong ergodic of m th-order countable nonhomogeneous Markov chains by means of the transition probability. By setting a sufficient condition for the m th-order countable nonhomogeneous Markov chains, a limit theorem for the m th-order countable nonhomogeneous Markov chains functional is obtained. Furthermore, we get a theorem that the entropy rate of m th-order countable nonhomogeneous Markov chains exists by using this limit theorem.

Keywords: nonhomogeneous Markov chains; ergodic; transition matrix